Olimpiada de matematică – etapa pe sector
21 februarie 2004

SOLUȚII ŞI BAREM DE CORECTARE
Clasa a IX-a

Subiectul I

a) **4 p** $x \in (-1;1)$ 1 p

Considerarea celor 4 subcazuri: $x \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right)$, $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$, $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right)$ 1 p

Explicitare 1 p

Determinarea soluțiilor: $x \in \left\{0; \frac{1}{2}\right\}$ 1 p

b) **3 p** $\frac{1}{abc} \geq 3(a+b+c) \Leftrightarrow 1 \geq 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow (ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (ab-bc)^2 + (bc-ca)^2 + (ca-ab)^2 \geq 0$

Subiectul II

a) **4 p** $\begin{cases} ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \\ ax_1 + bx_2 + c = 0 \end{cases}$ 1 p

$x_1 = x_2^2$; $x_1 \cdot x_2 = x_2^3 = \frac{c}{a}$ 1 p

$x_2 = \sqrt[3]{\frac{c}{a}}$, $x_1 = \sqrt[3]{\frac{c^2}{a^2}}$ 1 p

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \sqrt[3]{\frac{c}{a}} + \sqrt[3]{\frac{c^2}{a^2}}$, finalizare 1 p

b) **3 p** $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$; $0 \in A$, $1 \in A$ 1 p

$x_1^2 + x_2^2 = \frac{25}{36} < 1$; $\forall n \geq 2$, $x_1^n + x_2^n \leq \frac{25}{36}$ 1 p

$A = \{0, 1\}$ 1 p

Subiectul III

a) $u(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $a_1 \neq 0$

$v(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, $a_2 \neq 0$

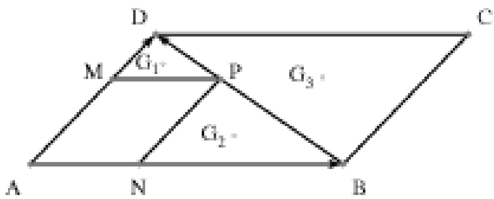
$(u \circ v)(x) = u(v(x)) = a_1 \cdot a_2^2 x^4 + \ldots + a_1 \cdot c_2^2$ şi cum $a_1 \cdot a_2^2 \neq 0 \Rightarrow u \circ v \in B$

2 p

b) Dacă $f(x)=x^2-2x$, atunci $f(1-x)=f(1+x),\ \forall x\in\mathbb{R};\ f\in A$ şi pentru orice funcție $\varphi\in A,\ \ g=\varphi\circ f\in B$ şi $g(1-x)=g(1+x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. 2 p

c) Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=x^4+x+1$ se arată ca nu poate fi scrisă $h=u\circ v$, unde $u,\ v\in A$ 3 p

Subiectul IV



Fie $\left(\mathrm{A},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$ un reper în planul paralelogramului. 1 p

Notăm $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{x},\ \overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{y},\ \overrightarrow{\mathrm{AN}}=\alpha\cdot\vec{x},\ \overrightarrow{\mathrm{AM}}=\beta\cdot\vec{y}$ 1 p

Fie G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale celor 3 triunghiuri. $\overrightarrow{\mathrm{AG_1}}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$ şi analoagele. 2 p

Fie G' şi G'' centrele de greutate ale $\Delta\mathrm{MNC}$, respectiv $\Delta\mathrm{G_1G_2G_3}$. Finalizare 3 p